Ιουνιος 2014

ΘΕΜΑ 1:

α) ΝΔΟ το $B=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^{\nu}: \|\bar{x}\|\le 1\}$ φραγμενο, κλειστο, συμμετρικο (δηλ $\forall\ \bar{x}\in B: -\bar{x}\in B$) και κυρτό (δηλ $\forall \bar{x},\bar{y}\in B$, $\forall t\in[0,1]: t\bar{x}+(1-t)\bar{y}\in B$)

ΛΥΣΗ

• B φραγμένο $\Rightarrow (\exists c>0): \|\bar{x}\|\le c,\ \forall \bar{x}\in B$

αφου $\forall c\ge 1$ εχουμε $\forall \bar{x}\in B: \|\bar{x}\|\le 1\le c$

• B κλειστο $\Leftrightarrow \forall (x_\nu)\subset B: \bar{x}_\nu\to\bar{x}_0\in\mathbb{R}^{\nu}$ εχουμε $\bar{x}_0\in B$

Εστω $\bar{x}_\nu\in B$, $\forall \nu\in\mathbb{N}$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$

Αρα, $\|\bar{x}_\nu\|\le 1$ τοτε θΔΟ $\|\bar{x}_0\|\le 1$

αφου $\|\bar{x}_\nu\|\to\|\bar{x}_0\|$ (επειδη ειναι απεικόνιση $\bar{x}\mapsto\|\bar{x}\|$ συνεχής συνάρτηση)

Συνεπως, αφου $\|\bar{x}_\nu\|\le 1 \Rightarrow \|\bar{x}_0\|\le 1$

• B συμμετρικο, αφου $x\in B\Rightarrow \|\bar{x}\|\le 1\Rightarrow \|-x\|=|-1|\cdot\|\bar{x}\|$
$=\|\bar{x}\|\le 1$.

• B κυρτο, εστω $x,y\in B$ $t\in[0,1]$

θΔΟ $tx+(1-t)y\in B \Rightarrow \|tx+(1-t)y\|\le 1$

αλλα $\|t\bar{x}+(1-t)\bar{y}\|\le\|t\bar{x}\|+\|(1-t)\bar{y}\|=$

$=t\cdot\|\bar{x}\|+|1-t|\cdot\|\bar{y}\|\overset{1-t\ge 0}{=}t\cdot\underbrace{\|\bar{x}\|}_{\le 1}+(1-t)\underbrace{\|\bar{y}\|}_{\le 1}\le$

$\le \cancel{t}+1-\cancel{t}=1$

β. Εστω $f(x,y)=x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Ν.Β στο $(1,1)$ το εφαπτόμενο επιπεδο της f και την παράγωγο κατά κατευθυνση $v\in\mathbb{R}^2$ με $\|v\|=1$. Ποια η σχεση των δυο;

ΛΥΣΗ

$\nabla f(x,y)=(2x,-2y)\Rightarrow \nabla f(1,1)=(2,-2)$

$z=\cancel{f(1,1)}^{0}+\nabla f(1,1)(x-1,y-1)=$

$=(2,-2)(x-1,y-1)=$

$=2x-\cancel{2}+\cancel{2}-2y=2x-2y\Rightarrow$

$\Rightarrow z=2x-2y$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f((1,1)+h(v_1,v_2))-f(1,1)}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1+1,hv_2+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\|hv_1+1\|^2-\|hv_2+1\|^2}{h}=$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2}+2hv_1+\cancel{1}-\cancel{h^2}-2hv_2-1}{h} = 2(v_1-v_2)$$ ← αφου $v=(v_1,v_2) \Rightarrow \|v\|=1$

Αφου, f διαφορίσιμη τοτε

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = Df(1,1)\cdot v = \nabla f(1,1)\cdot v = 2(v_1-v_2).$$

Η ευθεία $t \mapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 2(v_1-v_2) \end{pmatrix}$

βρίσκεται στο εφαπτόμενο επίπεδο

$z = 2x-2y$ αφου $z = t\cdot 2(v_1-v_2)$ και

$2(x-y) = 2(1+tv_1-(1+tv_2)) = 2t(v_1-v_2)$

ΘΕΜΑ 2

α) ΝΔΟ η $f(\bar{x}) = e^{\|\bar{x}\|}$, $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ είναι συνεχής.

ΛΥΣΗ

$x_v \to x_0 \Rightarrow \|x_v\| \to \|x_0\| \Rightarrow e^{\|x_v\|} \to e^{\|x_0\|}$

διότι η $g(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση

β) Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση

$f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(v+u)+\sin(u+v+w))$

και $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, οπου:

$g(x,y) = (e^x, \cos(x-y), e^{-y})$

Να εξετάσεται πόσες φορές είναι διαφορίσιμη η $f\circ g$ και να υπολογίσετε την παράγωγο στο $(0,0)$

ΛΥΣΗ

$f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y))$

οπου, $D(f\circ g)(x,y) = D(f(g(x,y)))\cdot Dg(x,y) \xRightarrow{(x,y)=(0,0)}$

$\Rightarrow Df(g(0,0))\cdot Dg(0,0)$ — $(*)$

παίρνουμε για f,g διαφορίσιμες τον Ιακωβιανό

$$J_f(u,v,w) = \begin{pmatrix} e^{u-w} & 0 & -e^{u-w} \\ -\sin(v+u)+\cos(u+v+w) & -\sin(v+u)+\cos(u+v+w) & \cos(u+v+w) \end{pmatrix}$$

$\quad\|$

$Df(u,v,w)$

(100)

καθώς, $Dg(x,y) = Jg(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ -\sin(x-y) & \sin(x-y) \end{pmatrix}$

$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $g(0,0) = (1,1,1)$

$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\sin 2 + \cos 3 & -\sin 2 + \cos 3 & \cos 3 \end{pmatrix}$

Άρα, (*) $D(f\circ g)(0,0) = Df(g(0,0)) \cdot Dg(0,0) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sin 2 + \cos 3 & -\cos 3 \end{pmatrix}$

Η $(f\circ g): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι απειρες φορές διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^2$ διότι αποτελείται από συναρτήσεις οι οποίες είναι ως προς κάθε (u,v,w) (ή (x,y)) απειρες φορές μερικώς διαφορίσιμες και πάντα προκύπτουν ως μερικές παράγωγοι ουσιαστικά οι ίδιες συναρτήσεις (μέχρι προσήμου) που είναι και συνεχείς, μπορούμε να παραγωγίσουμε απειρες φορές των f, g μερικώς και άρα με τη $f\circ g$. (άρα $f\circ g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

ΘΕΜΑ 3 (ΛΥΜΕΝΟ ΣΤΟ ΝΤΟΣΙΕ).

ΘΕΜΑ 6

Έστω $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\|(x,y)\| < 1$

Να βρεθεί σε κάθε σημείο (x,y,z) του γραφήματος της f το εφαπτόμενο επίπεδο και ένα διάνυσμα $\bar{n} \perp$ στο επίπεδο αυτό.

Ποια η σχέση του $\bar{n}$ με το (x,y,z);

ΛΥΣΗ

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right), \text{ συνεχείς.}$$

Εφαπτόμενο επίπεδο στο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (x-x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (y-y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \sqrt{1-x_0^2-y_0^2} \end{pmatrix} + (x-x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{pmatrix} + (y-y_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{pmatrix}$$

Ενα καθετο διανυσμα δίνεται απο το

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & -x_0/\sqrt{1-x_0^2-y_0^2} \\ 0 & 1 & -y_0/\sqrt{1-x_0^2-y_0^2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_0/\sqrt{1-x_0^2-y_0^2} \\ y_0/\sqrt{1-x_0^2-y_0^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \sqrt{1-x_0^2-y_0^2} \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 7

Έστω $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\|(x,y)\| < 1$

Ν.β ενα πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, 0 < \delta < 1): \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - p(x,y)| < \varepsilon \cdot (x^2+y^2)$

ΛΥΣΗ

(Θα παίξουμε με Taylor)

Ψαχνουμε πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμου : $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

με

ομικρον

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-p(x,y)}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow f(x,y) - p(x,y) = o(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow f(x,y) = p(x,y) + o(x^2+y^2)$.

Αυτο ισχύει σιγουρα αν το $p(x,y)$ πολυώνυμο Taylor

δηλ. $p(x,y) = \cancel{f(0,0)}^{1} + \cancel{\nabla f(0,0)}^{\vec{0}} \binom{x}{y} + \frac{1}{2}(x,y)\, Hf(0,0) \binom{x}{y}$

οπου $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Αρα, τελικα

$$\varphi(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2 - y^2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \blacksquare$$

ΘΕΜΑ 8

i) Να βρείτε τα τοπ. ακρότατα της $f(x,y) = x^2 \cdot y - 2xy + y^3$

ΛΥΣΗ

$$\nabla f(x,y) = (2xy - 2y,\ x^2 - 2x + 3y^2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2xy - 2y = 0 \\ x^2 - 2x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y(x-1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ή } x = 1$$

- Για $x = 1$,

$$1 - 2 \cdot 1 + 3y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- Για $y = 0$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2, \quad (0,0), (2,0)$$

Άρα, κρίσιμα σημεία: $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), (0,0), (2,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 6y \end{pmatrix}$$

- $Hf\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, θετ. ορισμένος σημείο τοπ. ελαχίστου

- $Hf\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, αρνητ. ορισμένος σημείο τοπ. μεγίστου

- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Hf(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0)$ είναι σαγματικό σημείο

- $Hf(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Hf(2,0) < 0 \Rightarrow (0,0)$ είναι σαγματικό σημείο